El orden y el caos. ¿Dónde empieza lo uno y termina lo otro? Observando el cosmos como un todo, percibimos un ente completamente organizado, en el que es posible predecir cualquier evento con una precisión casi obscena. Si lo observamos como un conjunto, veremos que está compuesto de infinidad de partículas que interactúan entre sí de un modo completamente caótico. Entonces podemos preguntarnos si existe realmente el caos o simplemente éste es el nombre que le damos a los sistemas tan complejos que nuestra mente no consigue entender. A veces las esferas, elipses y demás figuras simples son las que están exclusivamente en nuestra mente simplificadora y los cuerpos fractales los que realmente están ahí.

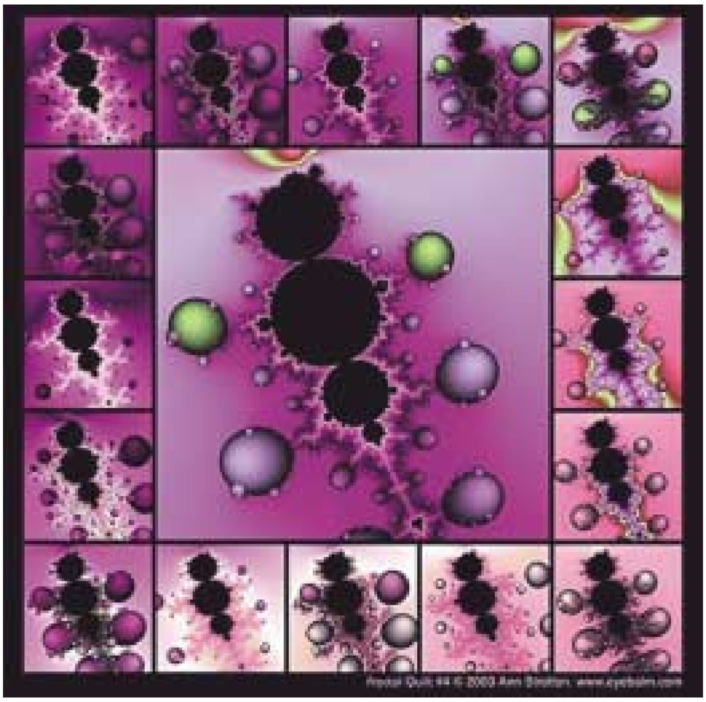
El conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia

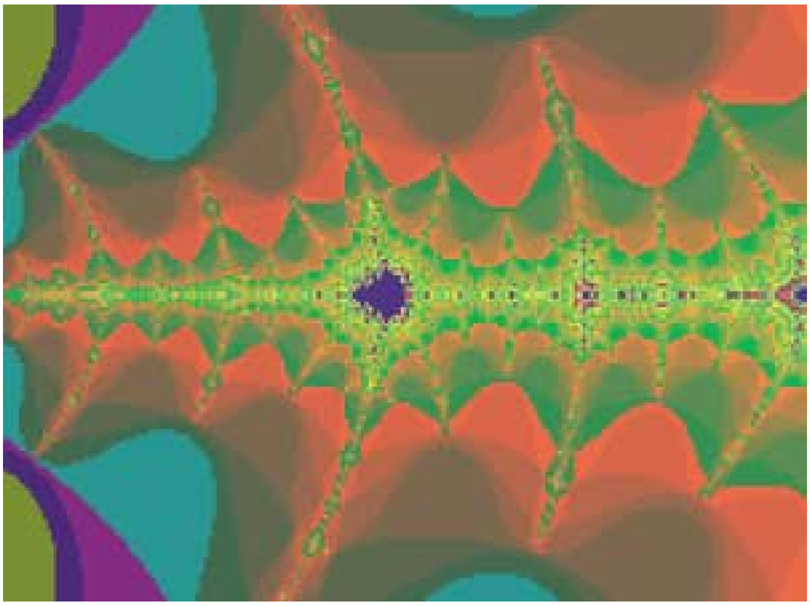
FRACTALES: «MATEMÁTICA DE BELLEZA INFINITA»

José Higueras Soler.
Ingeniero Técnico de Telecomunicación. Sonido e Imagen

Del amplísimo universo donde residen las matemáticas, una de las fronteras más hermosas, que las une con la metafísica, es la teoría fractal. Dentro de este universo reside el conocido conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia. El objeto de este artículo es hacer algo más cercana a los lectores esta paradoja matemática.

Aunque se podría decir que el ser humano ha intuido la geometría fractal durante toda la historia, y así se demuestra a lo largo de la literatura universal, no es hasta hace un par de décadas cuando Benoit B. Mandelbrot, siguiendo los pasos del matemático Gaston Julia, enuncia esta teoría, *donde la dimensión de los objetos no es, como en la geometría clásica, un número definido, sino que se encuentra entre dos números.* Por ejemplo,

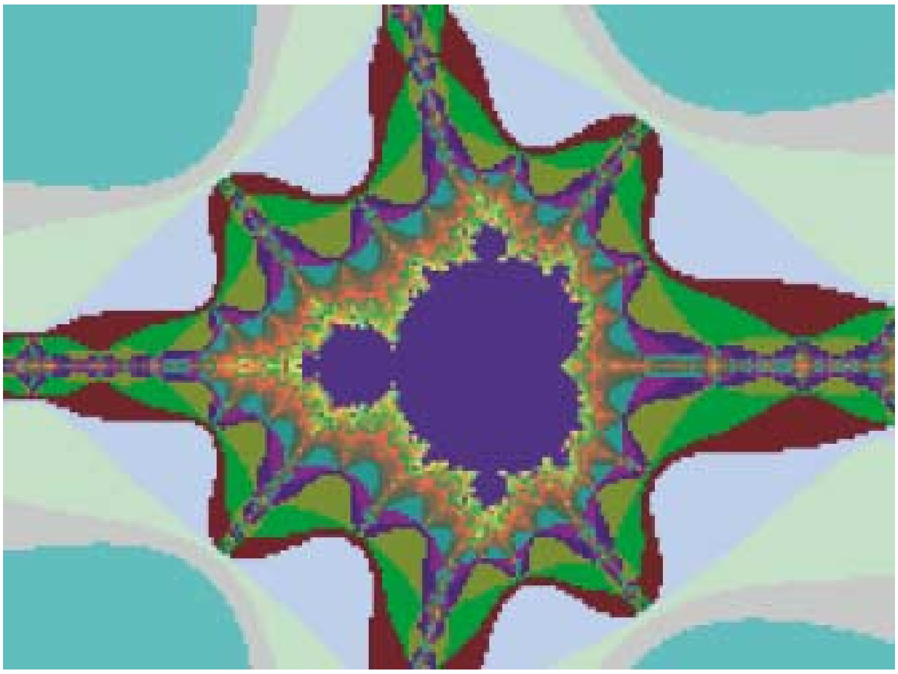




en el famoso conjunto Mandelbrot, la dimensión está entre el uno y el dos.

Si consideramos el litoral de la isla de Gran Bretaña (por poner uno de los ejemplos más mencionados, cualquier otro litoral valdría exactamente igual) e intentamos hallar su perímetro de la forma más exacta posible, nos encontraríamos con el pequeño problema de que *cuando utilizamos mayor precisión para realizar una medida, mayor será la longitud de ésta;* así, para una precisión absoluta, la medida será infinita.

Todo esto tiene una explicación muy simple. Supongamos que vamos a medir una porción del litoral, que en principio nos puede parecer recto, cogemos un metro y medimos, éste nos dice que esta porción recta mide dos metros y medio. Perfecto. Ahora nos agachamos y vemos que esta porción que nos había parecido tan recta en realidad está formada por millones de granitos de arena, cada uno colocado al azar y con una forma y tamaño completamente distinto al de sus semejantes, y así, cada vez que vayamos a intentar medir nuevamente la longitud y nos acerquemos un poco más, descubriremos nuevas partículas, que incrementarán más la longitud inicial. El error que estamos cometiendo es el de medir un cuerpo con «dimensiones euclidianas», cuando se trata claramente de un cuerpo con «dimensión fractal». Mandelbrot sugirió que las montañas, nubes, rocas de agregación, galaxias y otros fenómenos naturales son similares a los fractales.



Benoit B. Mandelbrot

Benoit B. Mandelbrot, nació en 1924 en la localidad de Warsaw, Polonia, donde vivió hasta los 12 años. Es en 1936 cuando su familia emigra a Francia donde su tío Szolem Mandelbrot, profesor de matemáticas en el *Collège de France*, toma las riendas de su educación.

Mandelbrot estudió en París en el *Lycée Rolin* y más tarde en el *Lyon* y en el *California Institute of Technology* (EEUU) obteniendo el doctorado en matemáticas en la Universidad de París en 1952.

Ha enseñado economía en la Universidad de Harvard, ingeniería en Yale, fisiología en el Colegio Albert Einstein de Medicina y matemáticas en París y Ginebra.

Entre 1949 y 1957, Benoit trabajó en el Centre National de la Recherche.

Actualmente (desde 1958) trabaja en la IBM's Watson Research Center, como matemático e investigador.

Con la ayuda de los gráficos por ordenador, Mandelbrot, demostró cómo el trabajo de Julia es el camino para conseguir hallar uno de los más hermosos fractales conocidos hoy en día, el conocido *Conjunto Mandelbrot.*

Benoit B. Mandelbrot, reflejó su trabajo en diversas publicaciones como *«Les objets fractals, forn, hasard et dimension»* en 1975 y más completamente en *«The fractal geometry of nature»* en 1982.

Su trabajo ha sido reconocido en varias ocasiones con la concesión de diversos galardones de distinta índole: la medalla *«Barnard for Meritorious Service to Science»* en 1985. En los años siguientes recibió la medalla *«Franklin»;* en 1987 fue galardonado con el premio *«Alexander von Humboldt»;* también recibió la medalla *«Steindal»* en 1988 y muchos otros premios, incluyendo la medalla *«Nevada»* en 1991.

Gaston M. Julia

El matemático Gaston Maurice Julia nace el 3 de febrero de 1893 en Sidi Bel Abbès, Argelia, y muere el 19 de marzo de 1978 en París, Francia.

Con tan sólo 25 años Julia escribe y publica la que es considerada como su obra maestra, titulada *«Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles»*, la cual le otorga de cierta fama en el ámbito matemático.

Julia se involucra en la Primera Guerra Mundial, donde resulta gravemente herido, perdiendo su nariz, por lo que se vio obligado a usar una mascarilla negra en la cara por el resto de sus días. El percance le obligó a sufrir muchas operaciones durante las cuales llevó, en cada uno de los hospitales donde se alojó, una gran parte de sus estudios matemáticos.

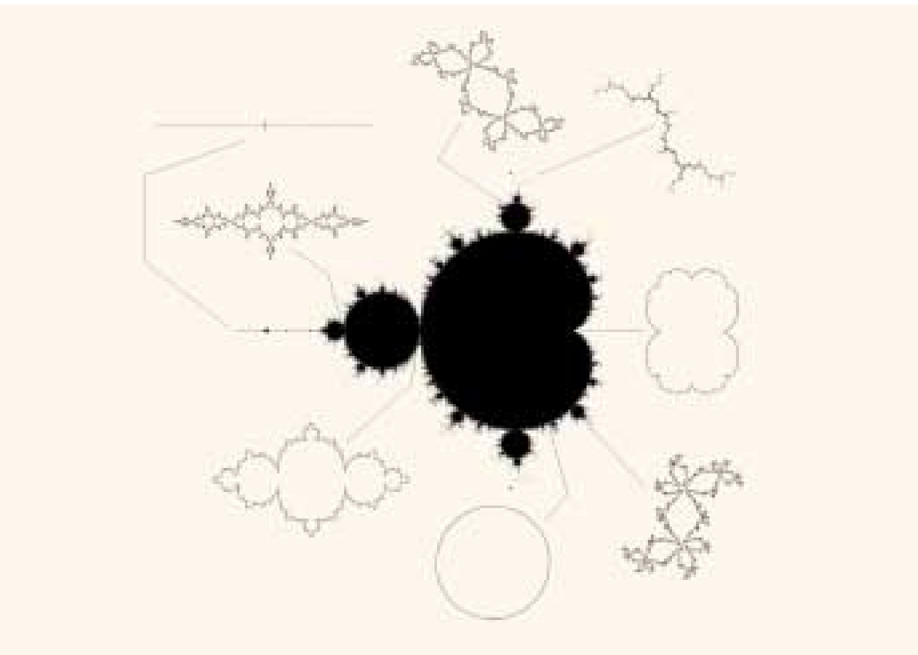
Gaston Julia llegó a ser destacado profesor en la *École Polytechnique* de París, donde pudo desarrollar al máximo sus teorías, pese a que muchas de ellas fueron despreciadas por algunos matemáticos considerados importantes en esos tiempos.

En 1918 Julia publicó *«Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles», Journal de Math. Pure et Appl. 8»,* concerniente a la iteración de funciones racionales. Sus descubrimientos le valieron ganar el *«Grand Prix de l'Académie des Sciences».*

En 1925 se organizaron seminarios en Berlín para estudiar su trabajo, cuando años atrás prácticamente se burlaban de él.

Desde su fama en 1920, su trabajo fue olvidado, hasta que Benoit Mandelbrot lo hizo resurgir en 1970 con sus experimentos computacionales. Un hombre que triunfó muy joven, y que tan rápido como su triunfo, fue trágicamente olvidado.

Gaston Julia fue uno de los padres de la moderna Teoría de Sistemas Dinámicos y es recordado por lo que hoy llamamos el Conjunto de Julia o el Set de Julia.



Las aplicaciones de los fractales en las nuevas tecnologías son cada vez mayores. Uno de los ejemplos más significativo lo llevó a cabo, en 1987, el matemático inglés Michael F. Barnsley, quien descubrió *la transformación fractal*, capaz de detectar fractales en fotografías digitalizadas, pudiendo así aumentar la capacidad de compresión digital. Este descubrimiento engendró la compresión fractal de imágenes, utilizada en multimedia y otras aplicaciones basadas en la imagen.

Se podría hablar así sobre los fractales, su filosofía y su estrecha relación con la teoría del caos hasta escribir miles de páginas dedicadas exclusivamente al tema. De hecho, existen ya multitud de libros, artículos e incluso páginas web muy interesantes. Intentaré centrar el resto de este artículo, en la medida de lo posible, en dos de los ejemplos más vistosos y estudiados en el mundo de los fractales que son: el conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia.

El conjunto de Mandelbrot nace en el plano complejo, el cual, como ya conocemos, tiene asociado en cada punto, un número complejo de la forma, $(a + bi)$. Si aplicamos en este plano la fórmula clave:

$$z \leftarrow z^2 + c$$

Donde z y c son dos números complejos, observaremos que si repetimos esta fórmula, utilizando cada vez el valor recién obtenido de z para calcular el siguiente, obtenemos una serie de coordenadas (números complejos) correspondientes a distintos puntos del plano complejo. Esta sucesión de puntos formará unas extrañas fluctuaciones en dicho plano.

Vamos a quitarle espesura a esta explicación matemática considerando cada punto del plano complejo como un preso que vagabundea por una prisión (que en este caso será el plano complejo) en busca de una vía de escape hacia el infinito. Observaremos que ciertos puntos escaparán velozmente, otros darán un sinfín de vueltas por el plano complejo hasta lograr su objetivo y otros, simplemente, vagabundearán por el plano complejo, sin lograr salir jamás de dicha prisión.

Lo primero que debemos hacer es proceder a la selección de los complejos c y z

Taller informático

Este apartado está pensado para los lectores más intrépidos. Se trata de proponerles el reto de crear sus propias versiones del conjunto Mandelbrot a través de su propio ordenador personal.

Existe un sinfín de generadores de fractales que podéis conseguir completamente gratis en Internet y que son mucho más sofisticados que el que intentaré explicar, así que a los que os sepa a poco, tened en cuenta que mejorar este programa es sólo cuestión de echarle un poco de imaginación y jugar con los millones de posibilidades que hay, aunque ya se sabe: *«La vela mayor es la que alumbra»*.

Teniendo en cuenta la fórmula tan sencilla antes planteada para hallar el conjunto de Mandelbrot, podéis imaginar que el código necesario para implementar este programa, no va a ocupar mucho espacio, aunque lo que sí que debo advertir es que para generar estas imágenes es necesario estudiar a fondo cada punto de ellas y esto, evidentemente, se va a traducir en tiempo de espera, así que tened paciencia, y aunque mal de muchos sea consuelo de tontos, pensad que los pobres pioneros de este tema, en los años 70 y 80, ni soñaban con la velocidad de nuestros procesadores.

Lo primero que vamos a hacer será crear un mapa de bits. Las dimensiones que os recomiendo son 200 × 200 pixels; no será una imagen muy grande, pero suficiente para poder visualizarla sin problemas. Este mapa de bits será nuestra representación del plano complejo, así cada pixel va a representar un punto en concreto de éste.

El conjunto de Mandelbrot está contenido en una circunferencia de radio dos, con centro en el origen de coordenadas, y nosotros contamos con una representación cuadrada del plano complejo que acoge una circunferencia inscrita de estas dimensiones tomando una resolución de 0,02 puntos por pixel.

Definimos nuestras variables:

— X e Y, de tipo Real, serán las variables que nos indiquen que punto del plano estamos analizando.

— Za y Zb, de tipo Real, serán los dos sumandos del número complejo Z («a» real y «b» imaginario).

— Ca y Cb, de tipo Real, serán los dos sumandos del número complejo C («a» real y «b» imaginario).

— I, será de tipo Entero (o entero largo, dependerá de la resolución que tomemos).

— Sw, de tipo Booleano; con ella decidiremos si el punto pertenece o no al conjunto.

Definimos también dos constantes Enteras. Una que llamaremos *Resolución;* esta constante va a ser la que determine la resolución del fractal y, por tanto, el tiempo que va a tardar en generarse, y otra que llamaremos *MóduloCuadrado* y que servirá para determinar el cuadrado del módulo a partir del cual, vamos a considerar que el punto tiende al infinito (utilizamos el cuadrado del módulo para evitar hacer la raíz cuadrada a la hora de hallar el módulo, cosa que frenaría aún más nuestro programa).

En principio:

Resolución = 100.

ModuloCuadrado = 4 (pues sabemos que si se supera el módulo 2, el punto tenderá a infinito).

Comenzamos el programa base:

Desde X = – 2 hasta 2 (longitud de cada paso = 0,01):

Desde Y = – 2 hasta 2 (longitud de cada paso = 0,01):

«inicializamos los complejos “Z” y “C”»

Za = 0, Zb = 0, Ca = X, Cb = Y

Desde I = 0 hasta *Resolución* (longitud de cada paso = 1):

Sw = verdadero

«Para cualquier complejo: $|Z|^2 = a^2 + b^2$*»*

Si (Za · Za) + (Zb · Zb) > *ModuloCuadrado*, entonces

Sw = Falso

Salir del bucle *«Siguiente punto»*

En el caso contrario:

«$Z = Z^2 + C$*»*

Za = [(Za · Za) – (Zb · Zb)] + Ca

Zb = (2 · Za · Zb) + Cb

Fin de la condición

Siguiente I

Si Sw = verdadero, entonces:

«El punto resultante pertenecerá al conjunto Mandelbrot»

Colorear punto de negro

Si Sw = falso, entonces:

«Aquí es donde realmente podemos jugar con el programa. Podemos asociar un color que varíe dependiendo del número de iteraciones que realizamos hasta que escape el preso, o dependiendo del tamaño del módulo que tiene el preso cuando escapa, o cualquier combinación que se nos antoje, cada cual nos dará una imagen aún más curiosa.»

Fin de la condición

Siguiente Y

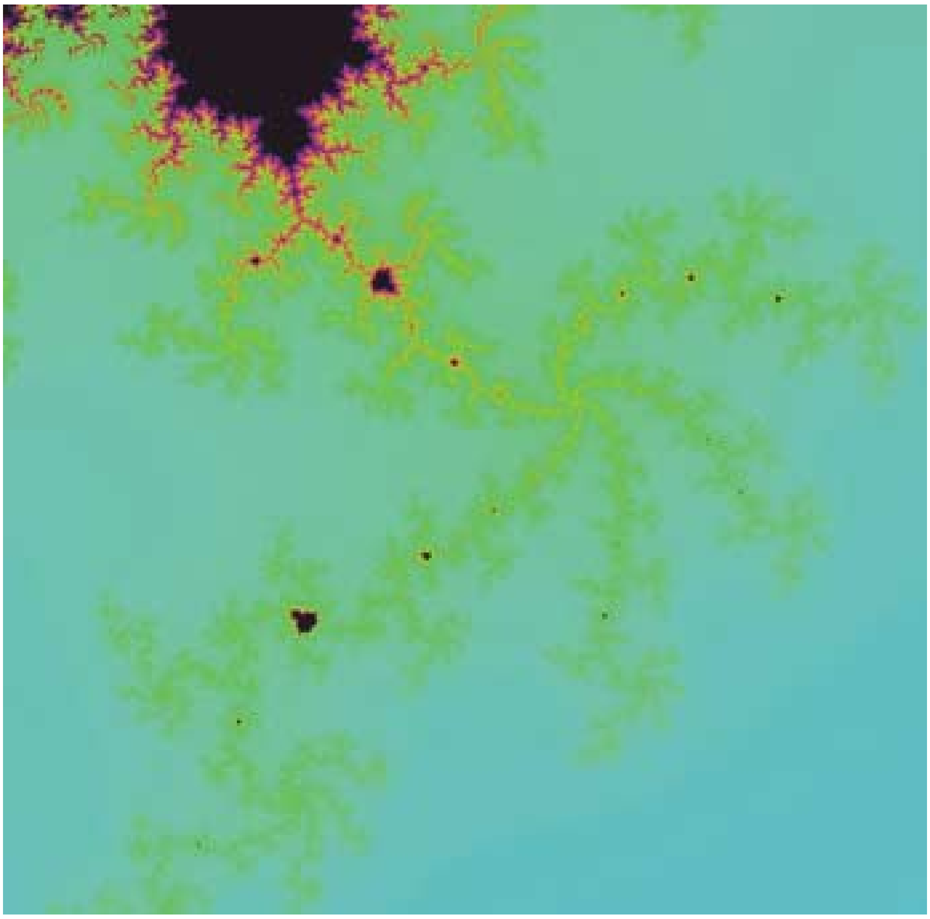
Siguiente X

Fin del Programa.

Para la mejora de la imagen resultante, tendréis que jugar con la constante *Resolución,* pero tened cuidado, pues el tiempo de espera se multiplicará considerablemente.

Aumentar la constante *MóduloCuadrado* no conlleva excesivos problemas de espera y dará mucho juego a la hora de jugar con los colores de la imagen.

También podéis jugar con el tamaño de la imagen, e incluso crear un subprograma que magnifique una parte de la imagen seleccionada, aplicando los mismos principios de este programa.



iniciales. Para z inicial cogeremos siempre z igual a cero. El punto c que seleccionemos será el punto que estemos analizando en ese momento, es decir, el preso. Deberemos ir seleccionando los diferentes puntos del plano complejo, y observar si cada uno de los puntos «c» consiguen o no escapar de su prisión compleja (alejarse al infinito, o permanecer siempre en una determinada región), iterando la fórmula anteriormente mencionada el mayor número de veces posible (idealmente infinitas veces) para ver si realmente el punto tiende a alejarse hacia el infinito. En realidad, sabemos que si el módulo de z llega a ser mayor que dos, el punto tenderá hacia el infinito. Esto es porque sabemos que el conjunto de Mandelbrot está contenido dentro de una circunferencia de radio dos con centro en el origen de coordenadas.

Esta acción habría que repetirla una y otra vez, haciendo variar a c sistemáticamente sobre la región; si el *«preso»* escapa, pintaremos el punto de blanco, y si no, lo haremos de negro. Si aparte del blanco, asignamos diferentes colores según la velocidad de escape del punto (número de veces que repitamos la operación hasta que c escape), obtendremos figuras aún más curiosas.

Gaston Julia fue uno de los padres de la moderna Teoría de Sistemas Dinámicos y es recordado hoy por el Conjunto de Julia

CONJUNTOS DE JULIA

Si aplicamos todo esto con un c fijo y z desempeñando el papel de punto inicial, el conjunto resultante diferirá bastante del conjunto de Mandelbrot, aunque mantendrá una fuerte relación. El resultante será lo que se conoce como conjunto de Julia (en honor al matemático francés Gaston Julia).

Para dibujar un conjunto de Julia, no debemos tomar siempre c igual a cero; cada punto del plano complejo tiene asociado un conjunto de Julia diferente y con una belleza propia. Así, igual que hay un solo conjunto de Mandelbrot, existen infinitos conjuntos de Julia que, de hecho, están intrínsecamente relacionados con el conjunto de Mandelbrot.

RELACIÓN ENTRE LOS CONJUNTOS DE JULIA Y EL CONJUNTO DE MANDELBROT

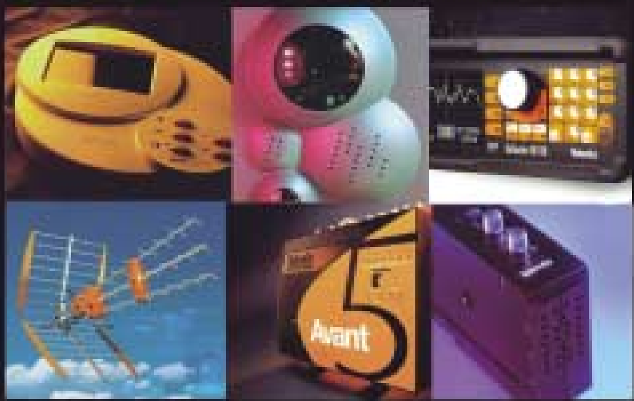
Cada punto del conjunto de Mandelbrot tiene asociado un conjunto de Julia. Para ciertos valores iniciales de c, el conjunto de Julia aparecerá de una sola pieza, mientras que para otros no será un conjunto conexo. Existe un teorema que relaciona esta propiedad con el conjunto de Mandelbrot. Si trazásemos una línea recta desde el interior del conjunto de Mandelbrot hacia el exterior, y fuésemos tomando los valores iniciales de c a lo largo de la línea, observaríamos que el conjunto de Julia que se forma en el interior sería un punto completamente conexo, que iría cobrando a medida que se aleja al exterior una forma más y más estrujada, hasta llegar al límite fronterizo del conjunto de Mandelbrot, donde se contraería en un garabato sin superficie y que llegaríamos al exterior, donde el conjunto sufriría una *«explosión»* que lo convertiría en *«polvo fractal»*, o dicho de un modo menos literario, tomaría la forma de varios conjuntos no conexos entre sí.

Si pusiésemos en cada fotograma de una película de vídeo el conjunto de Julia correspondiente a cada punto de la línea recta anteriormente mencionada sobre el conjunto de Mandelbrot, desde el origen de coordenadas (0 + 0i) hasta sobrepasar uno de sus extremos, veríamos un círculo casi perfecto, que a medida que se va avanzando hacia el exterior iría contrayéndose, estrujándose y adoptando formas más complejas hasta llegar a la mencionada «explosión» y, posteriormente, a medida que el punto se fuese alejando, la figura iría desvaneciéndose poco a poco, hasta desaparecer.

Creamos Tecnología

en Telecomunic@ciones

Televés



Llevamos más de 40 años
desarrollando producto

para la captación y distribución
de señales de televisión
adaptándonos a las nuevas tecnologías
y participando en proyectos europeos

para el desarrollo de las
Telecomunicaciones del Futuro

Rúa B.de Conxo, 17 - 15706 Santiago de Compostela Tel. 981 52 22 00 Fax 981 52 22 62 televes@televes.com www.televes.com